2.1.4 Funkce, definiční obor funkce

Předpoklady: 2103

Pedagogická poznámka: Následující ukázky si studenti do sešitů nepřepisují. Uděláme si na tabuli jenom krátký seznam: $S = a^2$, $y = x^2$, $s = vt$, výška lidí v 4B2009 termograf, matematická sportka, abychom si mohli rychle připomenout, které ukázky jsme měli. Při povídání o vlastnostech jednotlivých funkcí si pak případné funkce znovu ukážeme na tabuli.

Příklady:

a) Jak velký je obsah čtverce při různých délkách strany?

vzorec: $S = a^2$

strana [m]	1	20	0,03	π	…
obsah [m^2]	1	400	0,0009	π^2	…

b) Jaké jsou druhé mocniny reálných čísel?

vzorec: $y = x^2$

x	1	20	0,03	π	-2	$-\frac{2}{3}$	…
y	1	400	0,0009	π^2	4	$\frac{4}{9}$	…

c) Jak daleko dojede za určitou dobu auto jedoucí rovnoměrně rychlostí 80 km/h ?

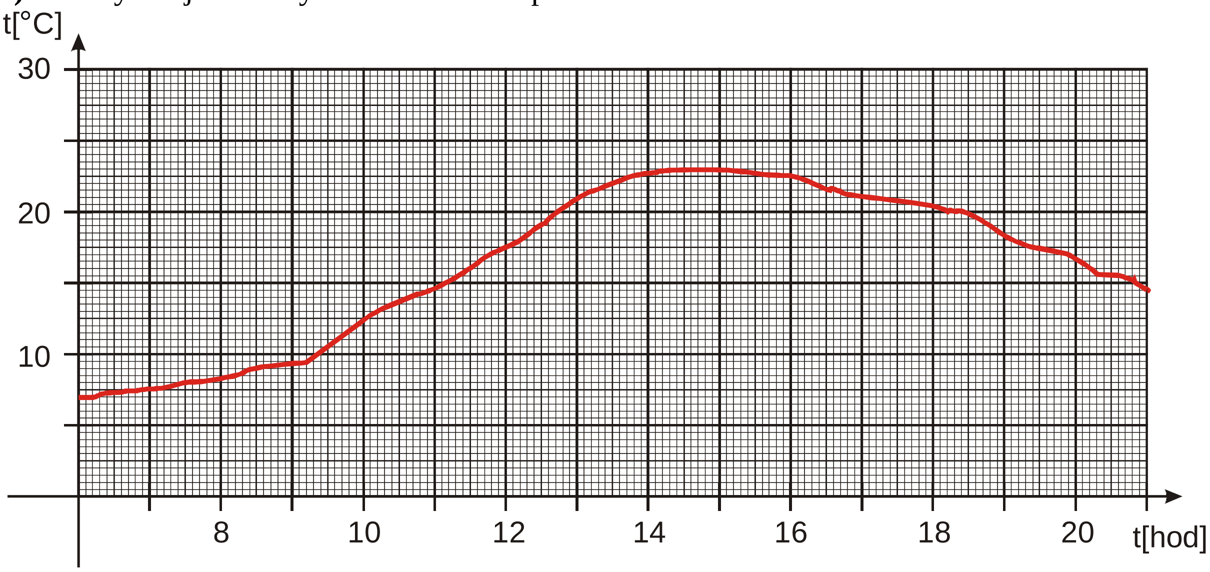
vzorec: $s = vt$

čas [h]	1	2	0,1	10	…
dráha [km]	80	160	8	800	…

d) Jaká je výška lidí ve třídě?

člověk	Kryňák	Adam	Anežka	Simona	Jirka	…
výška [cm]	181					…

e) Jaká byla v jednotlivých okamžicích teplota vzduchu?



f) V jednotlivých tazích matematické sportky byla ze všech reálných tažena tato čísla:

tah číslo	1	2	3	4	5	6	7
tažené číslo	0	3000000	0,0009	π^2	$\sqrt{5}$	$\frac{4}{9}$	-0,00123

Pedagogická poznámka: Když máme dost času, ptám se studentů, jestli vědí, jaká je největší přednost matematické sportky z hlediska pořadatele – nulová pravděpodobnost, že někdo vyhraje.

Společné znaky:

- známe výchozí množinu (čísla, lidi, časy…) a k jejím prvkům přiřazujeme nějaké číslo
- když vyberu prvek z výchozí množiny, je jednoznačně dané, k jakému číslu se dostanu

Jde tedy o zobrazení na množinu tvořenou reálnými čísly – říká se mu funkce

Funkce (píšeme $f(x)$) je zobrazení libovolné množiny na podmnožinu *R*.

Zobrazované množině říkáme **definiční obor funkce** $D(f)$, výsledné množině **obor hodnot funkce** $H(f)$.

Význam funkce: funkce je jednoznačná cesta, jak dospět k nějakým číslům, k nějakým hodnotám,

Fakt, že funkce $f(x)$ přiřazuje číslu 1 číslo 80, píšeme $y = f(1) = 80$ a čteme: „V bodě 1 má funkce hodnotu 80".

Jak se funkce zadávají?

1) předpis – postup, jak získat výsledné číslo + výpis čísel, ze kterých vycházíme (definiční obor - $D(f)$)

a) $S = a^2$ b) $y = x^2$ c) $s = vt$ d) Ke každému člověku přiřaď velikost v cm.

Co když není přímo uveden $D(f)$?

Dva přístupy:

$S = a^2$	$y = x^2$
$D(f)$ = co je rozumné vzhledem k významu	$D(f)$ = všechno, pro co to jde spočítat
$D(f) = (0,\infty)$ nebo $a \in (0,\infty)$, protože čtverec nemůže mít zápornou délku strany	$D(f) = R$ nebo $x \in R$

Pokud známe předpis funkce, píšeme často: $y = f(x) = x^2$ **nebo pouze** $f(x) = x^2$

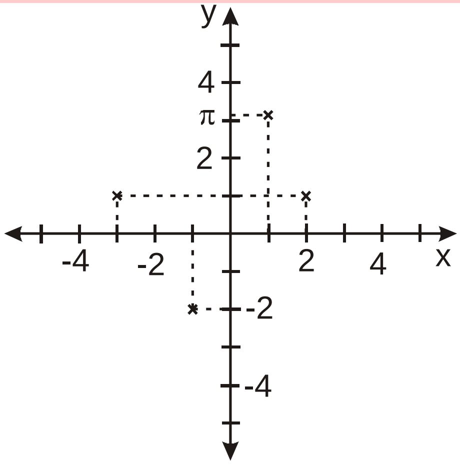
Pedagogická poznámka: Při hodině samozřejmě nechávám studenty najít mezi ukázkami funkce zadané předpisem samostatně. Než mezi ně zařadí i bod d) chvíli trvá, je však nutné, aby si uvědomili, že ani v matematice není vzorec jediná možnost.

2) tabulkou – přímo uvedeme dvojice, které k sobě patří

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0	3000000	0,0009	π^2	$\sqrt{5}$	$\frac{4}{9}$	-0,00123

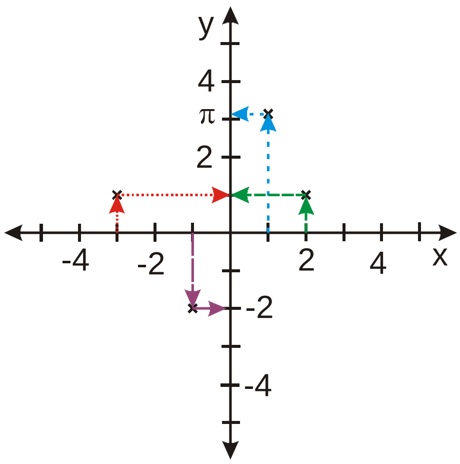
Můžeme tak zadat kde co (i funkce, které nejdou zadat předpisem, jako jsou náhodná čísla), ale těžko funkci s nekonečným $D(f)$.

3) grafem – každá dvojice $[x, y]$ má v grafu svůj bod o souřadnicích $[x, y]$



Ve všech případech platí, že na vodorovnou osu vynášíme proměnnou, ze které vycházíme (většinou *x*), na svislou osu vynášíme proměnnou z cílové množiny (většinou *y*). Tento zvyk je nutné dodržovat, pokud vyneseme proměnné obráceně, budou mít grafy jiný tvar a nebudou platit některá pravidla, o kterých se budeme bavit dále.

I v grafu funkce můžeme pomocí šipek zobrazit, od kterého čísla, ke kterému číslu dospějeme.



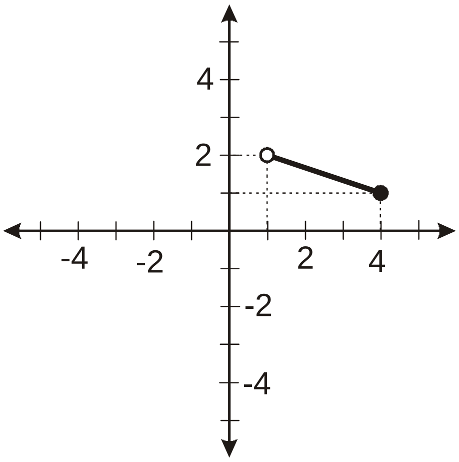
Toto zobrazení se v praxi nekreslí zejména proto, že bývá považováno za samozřejmé chápat funkci tímto způsobem.

Pedagogická poznámka: Předchozí obrázek je nutné studentům ukázat a ještě několikrát se o něm zmínit. Není vůbec samozřejmé, že studenti grafy tímto způsobem chápou, ale v budoucnu jim to může mnohé usnadnit.

Poznámka: Obecně platí, že definičním oborem funkce může být libovolná množina. Je jasné, že zobrazování množiny všech studentů ve třídě v grafu by bylo obtížné, proto budeme funkce kreslené do grafů chápat trochu úžeji jako funkce reálné proměnné (funkce, jejichž definičním oborem je podmnožina reálných čísel).

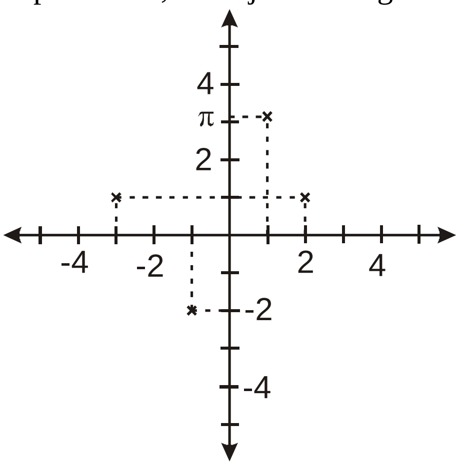
Pedagogická poznámka: Následující příklady (a také příklady v další hodině) mohou vypadat až příliš jednoduše. V každé třídě (sestavené ze studentů ze základních škol) jsem zatím objevil několik (řádově 5) studentů, kteří nemají vůbec žádné ponětí o vynášení hodnot do grafu nebo jejich odečítání.

Pro zobrazení funkcí, jejichž definiční obor se skládá z intervalů, se používá čára.



prázdné kolečko – bod do funkce nepatří
plné kolečko – bod do funkce patří

Př. 1: Zapiš funkci, která je zadaná grafem, pomocí tabulky.

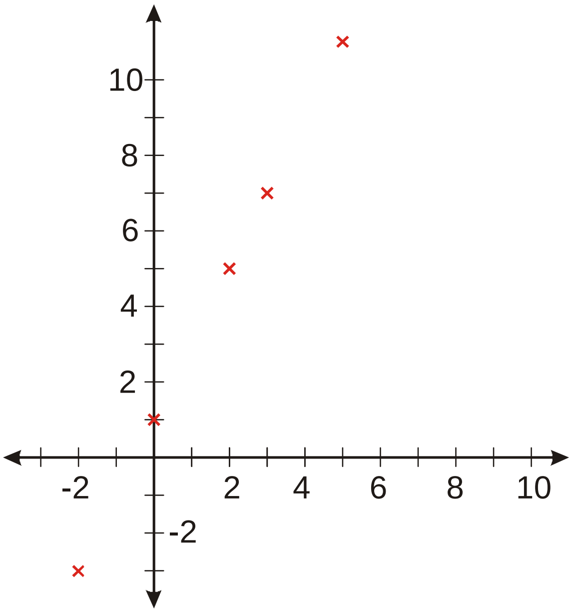


Každý křížek v grafu odpovídá jedné dvojici bodů. Křížek o souřadnicích $[2;1]$ určuje dvojici bodů $x = 2$ a $y = 1$. Podobně u dalších bodů. $\Rightarrow$ graf zadává funkci:

x	-3	-1	1	2
y	1	-2	π	1

Př. 2: Funkce je dána tabulkou. Zadej ji grafem i předpisem.

x	-2	0	2	3	5
y	-3	1	5	7	11



Předpis: Hodnoty jsou vždy o jednu větší než dvojnásobek neznámé $\Rightarrow$
$y = 2x + 1$

$D(f) = \{-2; 0; 2; 3; 5\}$ - definiční obor je důležitý bez něj by funkce zobrazovala všechna reálná čísla

Pedagogická poznámka: Přibližně polovina studentů přijde na předpis funkce, ale jen málokdo si uvědomí, že musí vypsat definiční obor, jinak by grafem nebylo pět bodů, ale celá přímka.

Př. 3: Rozhodni, které z následujících předpisů definovaných na množině všech žáků přítomných ve třídě můžeme považovat za funkce:
a) každému studentu přiřadíme jeho spolusedícího v lavici, studentům sedícím samostatně přiřadíme učitele,
b) každému studentu přiradíme počet jeho sourozenců,
c) každému studentu přiřadíme rodná čísla jeho rodičů,
d) každému studentu přiřadíme počet předmětů, ze kterých propadá.

a) každému studentu přiřadíme jeho spolusedícího v lavici, studentům sedícím samostatně přiřadíme učitele
Není funkce, nepřiřazujeme čísla.

b) každému studentu přiradíme počet jeho sourozenců
Je funkce, přiřazujeme čísla a máme zajištěno, že každý student bude mít přiřazeno jenom jedno číslo.

c) každému studentu přiřadíme rodná čísla jeho rodičů
Není funkce, přiřazujeme sice čísla, ale každý student má přiřazená dvě, nesplňuje podmínku jednoznačnosti.

d) každému studentu přiřadíme počet předmětů, ze kterých propadá
Jde o funkci, fakt, že naprostá většina studentů má přiřazenou nulu, není na závadu.

Pedagogická poznámka: Studenti mají problém zejména s body c) a d). Snažím se, aby jim v hlavě podmínka jednoznačnosti přiřazování zůstala.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je fakticky pouze opakováním, protože definiční obor výrazů už studenti určovali. Navíc budou definiční obory určovat ještě při probírání konkrétních funkcí. Pokud příklad nestihnete, nic se nestane. Důležité je opět trvat na používání jediného pravidla: „z definičního oboru vyjmeme všechna čísla, pro která nedokážeme výraz spočítat“. Oborem hodnot jsou pak všechna čísla, která nám mohou vyjít.

Př. 4: Urči definiční obor a obor hodnot následujících funkcí:

a) $y = 4x$ b) $y = x^2$ c) $y = \sqrt{x+2}$ d) $y = \frac{1}{2x-1} + 2$

a) $y = 4x$
Dosadit můžeme cokoliv $\Rightarrow$ $D(f) = R$.
$H(f) = R$

b) $y = x^2$
Dosadit můžeme cokoliv $\Rightarrow D(f) = R$.
Druhá mocnina vyrábí pouze kladná čísla nebo nulu $\Rightarrow$ $H(f) = \langle 0; \infty)$.

c) $y = \sqrt{x+2}$
Pod odmocninou musí být nezáporné číslo $\Rightarrow$ $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$ $\Rightarrow D(f) = \langle -2; \infty)$.
Z druhé odmocniny vychází pouze kladná čísla nebo nula $\Rightarrow$ $H(f) = \langle 0; \infty)$.

d) $y = \frac{1}{2x-1} + 2$
Ve jmenovateli nemůže být nula $\Rightarrow$ $2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $D(f) = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
Čitatel zlomku je nenulový $\Rightarrow$ zlomek $\frac{1}{2x-1}$ bude vždy různý od nuly $\Rightarrow$ celý výraz $\frac{1}{2x-1} + 2$ od 2 $\Rightarrow$ $H(f) = R - \{2\}$.

Shrnutí: Funkcí nazýváme předpis, který libovolné množině **jednoznačně** přiřazuje podmnožinu reálných čísel.